Über zerteilte Parallelogramme

Von JÁNOS SURÁNYI in Budapest

Professor L. Rédei zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

1. Der folgende Satz von DELONE [2] fand vielfältige Anwendungen in der Geometrie der Zahlen:

Satz I. *Es sei ein Parallelogrammgitter und ein Koordinatensystem in der Ebene gegeben, derart, daß kein Gitterpunkt auf den Koordinatenachsen liegt. Dann gibt es ein Parallelogramm mit Gitterpunkten als Eckpunkte, die alle in verschiedenen Quadranten der Koordinatenebene liegen, und so daß das abgeschlossene Parallelogramm keinen weiteren Gitterpunkt enthält.*

Ein Parallelogramm mit den erwähnten Eigenschaften nenne ich nach DELONE „zerteilt".

Mehrere Beweise dieses Satzes sind bekannt, darunter ein sehr einfacher Beweis von L. RÉDEI [5]. Ich fand einen weiteren einfachen Beweis, den ich auf RÉDEIS Veranlassung hier darlege. Ich nenne, wie üblich, die Gebiete $x>0, y>0$; $x<0, y>0$; $x<0, y<0$; $x>0, y<0$ der Reihe nach den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Quadranten. A und B seien zwei Gitterpunkte des ersten bzw. des zweiten Quadranten, ihre Projektionen auf die X-Achse seien P bzw. Q. Wir wählen die Gitterpunkte A, B so, daß das abgeschlossene Viereck $ABQP$ keinen Gitterpunkt des ersten und zweiten Quadranten außerhalb A und B enthält. Wir betrachten das durch die Strecke AB und die Halbgeraden AP und BQ begrenzte Halbstreifen S und die erste zu AB parallele, durch Gitterpunkte gehende Gerade g, die S durchschneidet. An g liegen unendlich viele Gitterpunkte, die nach einander in dem Abstand AB folgen. Die zur y-Achse am nächsten liegenden Gitterpunkte von g mit negativer bzw. positiver Abszisse seien C und D. Wenigstens einer von ihnen, etwa C, liegt im Inneren oder an der Grenze von S (Abb. 1). (Liegt D in S, so ist der Beweis mutatis mutandis derselbe.)

Nach seiner Wahl, liegt C im dritten Quadranten. Liegt D im vierten Quadranten, so ist $ABCD$ ein zerteiltes Parallelogramm. Liegt aber D im ersten Quadranten, so sind die Geraden BC und AD benachbarte, zueinander parallele, durch Gitterpunkte gehende Geraden. Es seien A' bzw. D' die zur X-Achse am nächsten liegenden Gitterpunkte mit positiver bzw. negativer Ordinate. Da A näher zur y-Achse liegt als D, muß D' ferner von dieser Achse liegen als A', und beide liegen ferner von der Y-Achse als A. So liegt A' im ersten und D' im vierten Quadranten. In diesem Falle ist also $A'BCD'$ ein zerteiltes Parallelogramm. Damit ist der Satz bewiesen.

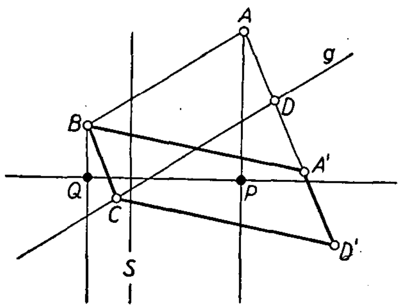

Abb. 1

2. Der Satz gilt auch ohne irgendwelche Voraussetzungen bezüglich der Achsen, wenn man etwa die negative X-Achse und die positive Y-Achse zum zweiten Quadranten, die positive X-Achse, die negative Y-Achse und den Punkt $O(0, 0)$ zum vierten Quadranten hinzufügt. Der Beweis kann ohne Änderungen beibehalten werden.

3. Als Anwendung gebe ich geometrische Beweise für drei Sätze über das Produkt von zwei binären linearen Formen:

Satz II (Minkowski [4]). *Es seien zwei inhomogene binäre lineare Formen*

$$x = a_1 u + b_1 v + c_1, \quad y = a_2 u + b_2 v + c_2$$

mit $\Delta = |a_1 b_2 - a_2 b_1| > 0$ *gegeben. Dann gibt es ganze Werte von* u *und* v *mit*

$$|xy| \leqq \frac{\Delta}{4}. \tag{1}$$

Satz III (Davenport—Heilbronn [1]). *Bei den obigen Bezeichnungen gibt es ganze Werte von* u *und* v *mit* $x > 0, y > 0$ *und*

$$xy \leqq \Delta. \tag{2}$$

Satz IV (Korkine—Zolatareff [3]). *Es seien zwei homogene lineare Formen*

$$x = a_1 u + b_1 v, \quad y = a_2 u + b_2 v$$

mit $\Delta = |a_1 b_2 - a_2 b_1| > 0$ *gegeben. Dann gibt es ganze, von* $u = v = 0$ *verschiedene Werte* u *und* v *mit*

$$|xy| \leqq \frac{\Delta}{\sqrt{5}}.$$

Die Punkte (x, y) mit ganzen Werten von u und v bilden einen Parallelogrammgitter in der Ebene, worin der Inhalt der Fundamentalparallelogramme[1]) gleich Δ ist. Das Gitter ist homogen bzw. inhomogen, je nach dem die linearen Formen x, y homogen bzw. inhomogen sind. Der erste Fall wird — entsprechend der Bemerkung im Abschnitt 2 — als spezialfall des letzteren behandelt. Das Produkt $|xy|$ kann etwa als der doppelte Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Ecken O, $P(x, y)$ und die Projektion von P auf eine der Achsen sind, gedeutet werden. Diese Dreiecke werde ich der Kürze halber als Projektionsdreiecke von P bezüglich der x- bzw. y-Achse nennen.

4. Gibt es einen Gitterpunkt an einer der Achsen, so gilt für seine Koordinaten $xy = 0 < \Delta/4$. Im übrigen Fall sei $ABCD$ ein zerteiltes Parallelogramm, dessen Ecken in der angegebenen Reihenfolge im ersten, zweiten, dritten und vierten Quadranten liegen. Die Diagonalen zerteilen dieses Parallelogramm in vier Dreiecke vom gleichen Inhalt $\Delta/4$. Der Punkt O liege etwa im Dreieck, dessen eine Seite AB ist. Dann gilt $OAB \leqq \Delta/4$.

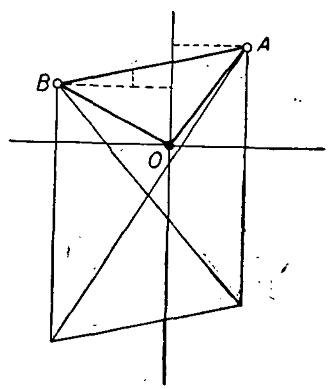

Abb. 2

Die y-Achse zerteilt das Dreieck OAB in zwei Dreiecke, von denen das eine im Projektionsdreieck bezüglich der y-Achse seiner Gitterpunktecke enthalten ist, das andere enthält das entsprechende Projektionsdreieck (Abb. 2). Wenn der Inhalt des Teildreiecks mit der letzteren Eigenschaft nicht größer als der des anderen Teils ist, dann ist dieser Inhalt, also auch der des entsprechenden Projektionsdreiecks höchstens gleich $\Delta/8$. Im Gegenfalle spiegeln wir den über OAB übergreifenden Teil des Projektionsdreiecks der erst erwähnten Art über den Mittelpunkt von AB. Dieses Spiegelbild liegt in OAB, aber außerhalb des anderen Projektionsdreiecks. In diesem Fall ist also der Gesamtinhalt der beiden Projektionsdreiecke kleiner als der Inhalt von OAB. Der Inhalt des kleineren Projektionsdreiecks ist also in beiden Fällen höchstens gleich $\Delta/8$, für seine Gitterpunktecke ist somit (1) erfüllt.[2])

Der Beweis zeigt auch, daß das Gleichheitszeichen weggelassen werden kann, es sei denn, daß $ABCD$ ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten und mit dem Mittelpunkt O ist.

---

[1]) D. h. ein Parallelogramm, dessen Eckpunkte Gitterpunkte sind, das aber keinen weiteren Gitterpunkt weder im Inneren noch am Rande enthält. Alle solche Parallelogramme haben denselben Inhalt.

[2]) Dieser Beweis ist im wesentlichen das geometrische Analogon des eleganten Beweises von D. B. Sawyer [6].

5. Zum Beweis des Satzes III benutzen wir Satz I in der im Abschnitt 2 erwähnten schärferen Form. $ABCD$ sei ein zerteiltes Parallelogramm, wobei die Achsen auf die angedeutete Art zum zweiten bzw. zum vierten Quadranten hinzugefügt werden. Die Ecken sollen in der angegebenen Reihenfolge zum ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Quadranten gehören. Man kann annehmen, daß B und D nicht beide an der x-Achse liegen, sonst vertauscht man die Rolle der x- und y-Achsen. Wir nehmen die zu BD parallele Gerade g durch A und daran die zur x-Achse am nächsten liegenden Gitterpunkte A' und E der ersten bzw. des vierten Quadranten (Abb. 3).

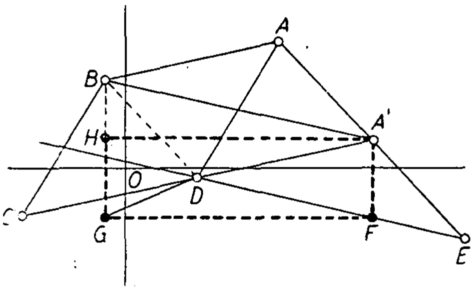

Abb. 3

Da B zum zweiten, D zum vierten Quadranten gehört, liegt E nicht näher zur Y-Achse als A'. Enthält das Parallelogramm $A'BDE$ den Punkt O, so enthält es auch das ganze zu A' gehörende Projektionsdreieck bezüglich der x-Achse. Der Inhalt dieses Projektionsdreiecks ist also nicht größer als $\Delta/2$, da der Inhalt eines Dreiecks, enthalten in einem Parallelogramm, kann die Hälfte des Inhalts des Parallelogramms nicht übertreffen, Gleichheit besteht nur dann, wenn zwei Ecken des Dreiecks benachbarte Ecken des Parallelogramms sind und das dritte Eck des Dreiecks an der gegenüberliegenden Seite des Parallelogramms liegt.

6. Sei nun O außerhalb des Parallelogramms $A'BDE$. Dann liegt wenigstens eine der Projektionen von A' an der x- und y-Achse zwischen den Geraden g und BD. Sonst hätte nämlich die zu BD parallele nächste Gerade, die an der anderen Seite von BD liegt als g (Abb. 4), keinen Punkt mit dem dritten Quadranten gemeinsam, obwohl diese Gerade doch durch C geht.

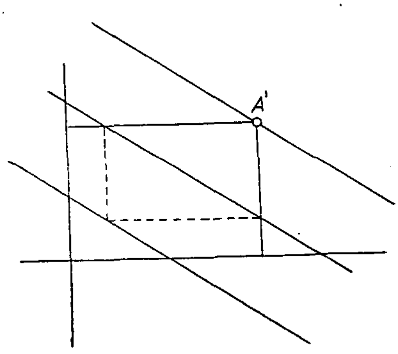

Abb. 4

Liegt die Projektion auf die x-Achse zwischen den beiden Geraden, so schneidet die durch A' gehende, zur y-Achse parallele Gerade die Gerade DE im vierten Quadranten. Zieht man noch durch B eine zur y-Achse parallele Gerade, so schließen diese Geraden, ferner die Geraden BA' und DE ein Parallelogramm vom Inhalt Δ ein und dieser Inhalt ändert sich nicht, wenn man noch die durch B gehende, zur y-Achse parallele Seite an ihrer Geraden so wegschiebt, daß das Parallelogramm in ein Rechteck $A'FGH$ übergeht (siehe Abb. 3). Dieses Rechteck enthält schon den Punkt O, woraus die Behauptung folgt.

Wenn nur die Projektion von A' an der y-Achse zwischen den Geraden g und BD liegt, so betrachten wir das Parallelogramm zwischen den Geraden g, BD, ferner den durch A' und durch E gehenden, zur x-Achse parallelen Geraden, und schieben die an der letzterwähnten Geraden liegende Seite entlang dieser Geraden so weg, daß das Parallelogramm in ein Rechteck übergeht. Dieses enthält den Punkt O, der Satz III gilt also auch in diesem Falle.

Man kann aus dem Beweis wieder ablesen, daß das Gleichheitszeichen nur dann nicht weggelassen werden kann, wenn an einer der Achsen unendlich viele Gitterpunkte liegen und die nächste durch Gitterpunkte gehende parallele Gerade, die den ersten Quadranten durchschneidet, die andere Achse in einem Gitterpunkt schneidet.

7. Entsprechend dem Satz IV betrachten wir nun homogene lineare Formen und einen homogenen Gitter. Bei den Vereinbarungen des Abschnitts 2 gibt es dabei auch zerteilte Parallelogramme. Da aber der Punkt O in jedem zerteilten Parallelogramm enthalten ist, ist er hier der zum vierten Quadranten gehörige Eckpunkt jedes zerteilten Parallelogramms. Die zum ersten, zweiten und dritten Quadranten gehörigen Ecken seien P_1, P_2, P_3. Wenn der erste und der dritte die Koordinaten x_1, y_1, bzw. $-x_3, -y_3$ haben, sind die Koordinaten des zweiten $x_2 = -(x_3 - x_1)$, $y_2 = (y_1 - y_3)$. Ich wende noch die Bezeichnungen $m_i = |x_i y_i|$ $(i = 1, 2, 3)$ und $m = \min(m_1, m_2, m_3)$ an. Dann ist

$$m_2 = (x_3 - x_1)(y_1 - y_3) = x_1 y_3 + x_3 y_1 - m_1 - m_3. \tag{3}$$

Man kann andererseits Δ als der doppelte Inhalt des Dreiecks OP_1P_3 folgendermaßen mit den Koordinaten ausdrücken:

$$\Delta = x_3 y_1 - x_1 y_3. \tag{4}$$

Aus den beiden Gleichungen erhält man nach Quadrierung des letzteren

$$\Delta^2 = (x_3 y_1 + x_1 y_3)^2 - 4 x_1 y_1 x_3 y_3 = (m_1 + m_2 + m_3)^2 - 4 m_1 m_3 =$$
$$= (m_1 - m_3)^2 + m_2(2m_1 + m_2 + 2m_3) \geqq 5m^2.$$

Es gilt also

$$m = \min(|x_1 y_1|, |x_2 y_2|, |x_3 y_3|) \leqq \frac{\Delta}{\sqrt{5}},$$

womit auch Satz IV bewiesen wurde. Man sieht gleich, daß das Gleichheitszeichen nur im Falle $m_1 = m_2 = m_3 = m = \Delta/\sqrt{5}$ nicht weggelassen werden kann. An Hand der Gleichungen (3), (4) kann man einsehen, daß in diesem Falle die Koordinaten der Gitterpunkte in folgender Form dargestellt werden können:

$$x = x_1\left(u + \frac{\sqrt{5}+1}{2}v\right); \quad y = y_1\left(u - \frac{\sqrt{5}-1}{2}v\right) \qquad (\Delta = \sqrt{5}\,|x_1 y_1|).$$

Literatur

[1] H. Davenport—H. Heilbronn, Assymmetric inequalities for nonhomogeneous linear forms, *Journal London Math. Soc.*, **22** (1947), 53—61.

[2] Б. Н. Делоне, Алгорифм разделенных параллелограммов, Известия Академии Наук СССР, Сер. мат., **11** (1947), 505—538. Deutsche Übersetzung in *Sowjetwissenschaft*, **2** (1948), 178—210.

[3] A. Korkine—G. Zolotareff, Sur les formes quadratiques, *Math. Annalen*, **6** (1873), 366—389.

[4] H. Minkowski, Über die Annäherung an eine reelle Größe durch rationale Zahlen, *Math. Annalen*, **54** (1901), 91—124.

[5] L. Rédei, Neuer Beweis eines Satzes von Delone über ebene Punktgitter, *Journal London Math. Soc.*, **34** (1959), 205—207. (Hier sind auch weitere Literaturangaben zu finden.)

[6] D. B. Sawyer, The product of two non-homogeneous linear forms, *Journal London Math. Soc.*, **23** (1949), 250—251.

(Eingegangen am 3. Mai 1960)